

استخدام طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات نموذج SIR وتطبيقه على مرضى كورونا: دراسة حالة العراق

م.م. شيما قاسم محسن

جامعة البصرة / كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء

Shaymaa.qassim79@gmail.com

المستخلص

تم في هذا البحث استخدام نموذج SIR لتحليل تطور مرض COVID-19 في العراق، اذ يعد نموذج SIR محكوم بوساطة نظام غير خطي من المعادلات التفاضلية التي تسمح لنا باكتشاف اتجاهات الوباء وعمل تنبؤات موثوقة لتطور العدوى على المدى القصير، تم استخدام طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات نموذج SIR، والتي توضح تطور العدوى في الفترة السابقة في العراق. تم استعمال البرنامج الاحصائي R في ايجاد تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة الامكان الاعظم. يظهر التحليل تنبؤات جيدة على المدى القصير باستخدام نموذج SIR والتي تكون مفيدة لمعرفة تأثير تطور الوباء، بالتالي تنفيذ الإجراءات التي تساعد في تقليل آثاره الضارة واتخاذ القرارات المناسبة للحد منه

الكلمات المفتاحية: نموذج SIR، تقدير الامكان الاعظم، مرض COVID-19، تقدير معلمات، برنامج R

Using the maximum likelihood method to estimate the parameters of the SIR model and applying it to Corona patients: a case study in Iraq

**Shaymaa Qasim Mohsin
Basrah University/College of Administration and Economics
Department of Statistics**

Abstract:

In this research, the SIR model was used to analyze the development of COVID-19 disease in Iraq, as the SIR model is governed by a non-linear system of differential equations that allow us to discover epidemic trends and make reliable predictions of the development of infection in the short term. The maximum likelihood method was used to estimate the parameters of the SIR model, which explains the development of infection in the previous period in Iraq. The R statistical program was used to estimate the model parameters using the maximum likelihood method. The analysis shows good short-term predictions using the SIR model, which are useful to know the impact of the development of the epidemic and thus implement measures that help reduce its harmful effects and take appropriate decisions to reduce it.

Keywords: model SIR , maximum likelihood estimation, COVID-19, parameter estimation, R program.

1. مقدمة

في السنوات الأخيرة، شهدنا زيادة ملحوظة في الابحاث التي تهتم بدراسة النماذج الوبائية الديناميكية (Wayne and Smith, 2005: 11) مع ذلك، يظهر بوضوح قلة الأدوات الإحصائية المتاحة التي تسمح للباحثين بتكييف النماذج الديناميكية مع هذه البيانات المتكررة ذات الفوارق الزمنية غير المنتظمة (Araujo, 2020 :26) (and Naimi). هذا ينطبق بشكل خاص على البيانات التي تأخذ شكلاً لا خطياً مع تباين في النماذج الديناميكية. عندما نقوم بقياس عملية ديناميكية، يتم كثيراً استنتاج دالة الانحدار لنموذج الإحصائي المقابل للبيانات المرصودة من معادلة تفاضلية تصف العملية الديناميكية الأساسي (Iannelli 2005 ; 8). والفكرة الرئيسة في نمذجة هذه العمليات الديناميكية تتمثل في فهم سلوك هذه العمليات، من خلال تحليل النماذج الرياضية لهذه الأنظمة (Cui and eta, 2008 ; 44). وغالباً ما تتكون معظم هذه النماذج من معادلات تفاضلية وتكون غالباً لا خطية، حيث يُمثل النموذج الديناميكي غالباً بواسطة معادلات تفاضلية عادية لا خطية. ومن اجل التنبؤ من خلال نموذج SIR، حيث تم في هذا البحث استعمال طريقة الامكان لتقدير معلمات النموذج. ان معظم النماذج الديناميكية في مجالات العلوم الطبيعية والحيوية والطبية والهندسية وغيرها هي عمليات ديناميكية معقدة (Diekmann and eta, 2000 : 173) غالباً ما يكون اعتمادها على الزمن، وبعضها الاخر يكون اعتمادها على الزمن والمكان.

ان هذه العلاقات في العمليات الديناميكية تكون متمثلة بمعادلات تفاضلية تتباين حسب طبيعة المشكلة المراد دراستها

(David and Lang, 2001 : 13) ان ديناميكية النظام تتعلق بالنظر الى النظام من حيث خواصه التركيبية المتغيرة مع الزمان والمكان (Sun and Zhu, 2008 :37)، يتم تصميم نظام المعادلات التفاضلية لاحتوائها كمية كبيرة من سلوك العمليات الديناميكية (McGoogan and eta, 2019 : 67-68)

ان المعلمات المتغيرة مع الزمن عادة ما تكون مجهولة القيمة، وهنا تكمن المشكلة في تقدير هذه المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (Non Linear Ordinary Differential Equation) وغالبا ما تحسب هذه المعلمات بالاعتماد على قيم ابتدائية أولية (Diekmann and eta, 2000 :78) ويتم اعتمادها من الدراسات السابقة او بالاستناد على الخبرة او قد تحتسب من ادبيات الموضوع ومع ذلك ان هنالك معلمات مجهولة نحتاج الى تقديرها من البيانات المشاهدة. أن تقدير المعلمات متغيرة الزمن يكون عندما يتم قياس عملية فسيولوجية او بايولوجية غالبا ما تعتمد او تستمد من دالة الانحدار للنموذج الإحصائي المقابل لبيانات المشاهدات في المعادلة التفاضلية التي تصف العملية الديناميكية الضمنية (John and Allman, 2003 : 64).

وفي هذا البحث سيتم تسليط الضوء على طرائق متعلقة بتقدير المعلمات المتغيرة زمنيا في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية بهدف إيجاد تقدير معلمات النموذج من خلال طريقة MLE Maximum Likelihood Estimation.

2. مشكلة البحث:

عند وجود اية ظاهرة مراد دراستها فان المشكلة الرئيسة لبحث ودراسة هذه الظاهرة تكمن في كيفية اتخاذ القرارات لحلها عن طريق اعتماد التحليل المناسب، عادة تحدد دالة الانحدار من نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية وهي في الغالب تشتمل على معلمات ثابتة ومتغيرة زمنيا حسب طبيعة المشكلة قيد البحث وعادة تكون هذه المعلمات مجهولة، تصبح معها عملية تقدير المعلمات في هذه النماذج من المشاكل الأساسية والهامة بما يتفق مع السلوك الأساسي للمشكلة قيد البحث، ومع البيانات المتاحة والتي غالبا ما تقاس مع الأخطاء العشوائية، اذ في اغلب الأحيان لا تمتلك هذه النماذج صيغ حلول تحليلية مما يؤدي الى اللجوء الى الحل العددي المتكرر للمعادلات التفاضلية، الذي بدوره يؤدي الى الكلفة الحسابية العالية في تقدير المعلمات المجهولة.

3.اهمية البحث:

تعد المعادلات التفاضلية مهمة جدا في تفسير الظواهر العلمية في المجالات كافة والسبب في ذلك اننا نستطيع كتابة المعادلات بمتغيرات كثيرة كدالة للمشتقات ووصف الحركة الديناميكية لتلك المتغيرات على فترات زمنية ليست بالضرورة ان تكون متساوية على خلاف نماذج الانحدار التي تهمل الجزء الديناميكي في هذه المتغيرات وكذلك بخلاف السلاسل الزمنية التي تختص بمشاهدات متغير عشوائي للسلسلة بصورة رتيبة زمنيا لهذا تم استعمال نماذج Ordinary Differential Equations (ODE) للاخطية لتفسير معظم الظواهر الديناميكية المعقدة.

4.هدف البحث:

يهدف هذا البحث الى تقدير معلمات نموذج SIR من خلال طريقة تقدير الامكان الاعظم عن طريق المعادلات التفاضلية (الاعتيادية) اللاخطية Non (Linear Ordinary Differential Equation) والتي تلائم نموذج SIR.

5. نموذج SIR:

أن نموذج SIR يستخدم لتوضيح التغيير في عدد السكان (عدد الأشخاص) الذين يحتاجون الى عناية او رعاية طبية اثناء المرض (الوباء)، ومن الضروري ملاحظة ان هذا النموذج لا يعمل مع جميع الامراض، وان نموذج SIR يكون مناسباً في شخص قد تعافى من المرض مرة واحدة وبذلك سيحصل على مناعة مدى الحياة، ويكون النموذج غير مناسباً اذا كان الشخص مصاباً. أذن أن النموذج يعرف من خلال الرموز الأساسية: (Hackborn 2005 p.p21)

$S(t)$: عدد الافراد المعرضون عند زمن (t)

$I(t)$: عدد الافراد المصابون عند زمن (t)

$R(t)$: عدد الافراد المتعافون عند زمن (t)

N : عدد السكان

حيث يمكن تحويل هذه الفرضيات الى المعادلات التالية

$$(1) \quad ds/dt = - \beta(t)I(t)$$

$$(2) \quad dI /dt = \beta(t) - \gamma I(t)$$

$$(3) \quad dR/dt = \gamma (t)$$

. β : تمثل معدل انتقال العدوى .

. γ : يمثل معدل الشفاء .

حيث أن:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (4)$$

وهذه المعدلات تصف الانتقال بين الافراد من مجموعة أخرى . ومن الخصائص الاساسية ونظرا لان النموذج يراقب التغيرات في الافراد . يفترض أن تكون جميع المتغيرات والمعلمات موجبة لجميع $t \geq 0$ ، لذلك يتم تحليل النموذج في منطقة متاحة ومستقرة (Hadelar, 2011 : 348)

$$X=\{S(t) , I(t) , R(t) , t \in \mathbb{R}^3\}$$

وهناك معلمة اخرى مهمة تشير الى عدد الاشخاص المصابين بالعدوى من شخص مصاب يطلق عليها (عدد التكاثر الاساسي)، مع توفر شروط القيم الابتدائية وهي كالاتي :

$$S_{(t=0)} = S_0 > 0 \quad , I_{(t=0)} = I_0 > 0 \quad , R_{(t=0)} = R_0 \geq 0$$

ونلاحظ عند جمع المعادلات نجد أن النظام لديه حل وحيد وموجب

$$\forall t \quad \dot{S}_t + \dot{I}_t + \dot{R}_t = 0,$$

حيث ان:

$$S'_t = - \frac{\beta}{N} S_{(t)} I_{(t)}$$

يمثل معدل الحالات المعرضين للاصابة.

$$I'_t = \frac{\beta}{N} S_{(t)} I_{(t)} - \gamma I_{(t)}$$

يمثل معدل حالات الاصابة.

$$R'_t = \gamma I(t)$$

تمثل معدل حالات الشفاء

وبما ان :

$$S_t + I_t + R_t = N \quad , \quad \forall t$$

أذ ان :

$$N = S_0 + I_0 + R_0 \quad (5)$$

المجموع الكلي للمجتمع

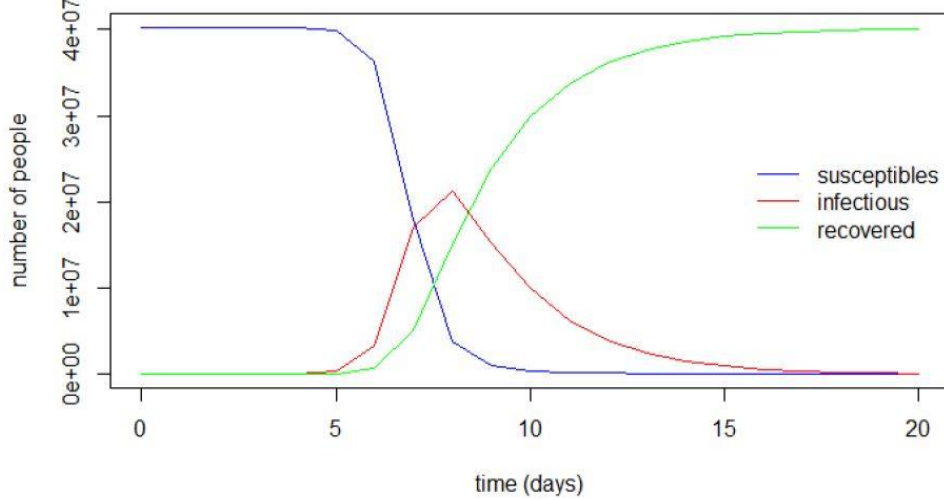
$$S_0 = N - I_0 \quad (6)$$

و يمكن كتابة نموذج SIR بصيغة الوقت المنفصل كالآتي :

$$S_{(t+1)} = S_{(t)} - \frac{\beta}{N} S_{(t)} I_{(t)} \quad (7)$$

$$I_{(t+1)} = I_{(t)} + \frac{\beta}{N} S_{(t)} I_{(t)} - \gamma I_{(t)} \quad (8)$$

$$R_{(t+1)} = R_{(t)} + \gamma I_{(t)} \quad (9)$$



الشكل (1) يمثل السلوك النموذجي لتطور الوباء بمرور الوقت

* المصدر اعداد الباحث

5.1 تقدير تأثير التدخل على معلمات انموذج SIR :

يمكن اعادة كتابة انموذج SIR المنفصل للحالات المختلفة بافتراض التغير اليومي بالشكل كالتالي (Leiva and Balakishnan, 2015 : 2302):

$$\Delta S = S_{(t+1)} - S_{(t)}$$

$$\Delta S$$

$$= -\frac{\beta}{N} SI \quad (10)$$

$$\Delta I = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I - \mu I \quad (11)$$

$$\Delta R$$

$$= \gamma I \quad (12)$$

$$\Delta(t)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{N} SI & 0 \\ \frac{\beta}{N} SI & -\gamma I \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \quad (13)$$

اذ ان:

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} S_{(t+1)} - S_{(t)} \\ I_{(t+1)} - I_{(t)} \\ R_{(t+1)} - R_{(t)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta I \\ \Delta R \end{bmatrix} \quad (14)$$

ويمكن التعبير عن معادلات النموذج واستخراج المعلمات عن طريق تفكيك

المصفوفة الى متجه للمعلمات ومصفوفة للمتغيرات وكالاتي :

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} -\frac{SI}{N} & 0 \\ \frac{SI}{N} & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (15)$$

حيث ان مصفوفة المتغيرات من درجة 2*3 ومتجه المعلمات من درجة 1*2
نحصل على الاتي بحل المعادلات بالنسبة للمعلمات :

$$\beta = \frac{\Delta C}{I} \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{\Delta R}{I} \quad (17)$$

أذ ان :

ΔC : تمثل التغير باليوم الواحد من اجمالي عدد الحالات .

أذ ان :

$$C = I + R \quad (18)$$

كما نفترض أن $S \approx N$ بسبب ان عدد المعرضين للاصابة يكون قريباً من حجم المجتمع.

بالتالي إذا كان لدينا تغيرات يومية في R, I ، نستطيع الحصول على تقديرات متسلسلة لمعاملات انموذج SIR على اساس يومي . وإن بطبيعة الحال، هذه التقديرات تكون غير دقيقة نتيجة الاخطاء في العملية والمراقبة، بينما عدد المصابين نسبياً قليل في بداية انتشار الجائحة، الاخطاء في العملية تتوقع أن تكون عالية، حيث تم التركيز في هذا البحث على نموذج SIR (SmithRoland David, 2008 :16)

5.2 معاملات الانموذج :

البيانات المستخدمة في الانموذج هي سلسلتان زمنية لمؤشرات covid-19 وتمثل التعداد اليومي لكل مما يلي :

الحالات المؤكدة C .

الحالات المتماثلين للشفاء R .

هذه البيانات تسمح لنا بحساب بيانات سلاسل زمنية جديدة هي :

$$I_t = C_t - R_t \quad (19)$$

عدد حالات الإصابة (يعرف ايضا باسم الحالات النشطة)

$$\Delta C_{(t)} = C_{(t+1)} - C_{(t)} \quad (20)$$

$$\Delta R_{(t)} = R_{(t+1)} - R_{(t)} \quad (21)$$

سوف نستخدم هذه البيانات لحساب التقديرات اليومية لمعاملات نموذج SIR. عند

أزالة اعتمادية الزمن t من الطرف الايمن

$$S_t \rightarrow S$$

بالتالي :

$$S_{(t+1)} = S - \frac{\beta}{N} SI \quad (22)$$

$$I_{(t+1)} = I + \frac{\beta}{N} SI - \gamma I - \mu I \quad (23)$$

$$R_{(t+1)} = R + \gamma I \quad (24)$$

6. طريقة تقدير الامكان الاعظم

تتضمن طريقة الامكان الاعظم (MLE) تقدير قيم معاملات الانموذج بالاستناد على مجموعة بيانات المشاهدات من خلال دالة الامكان. ويمكن تعريفها بانها قيم المعلمات التي تجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى، ويتم استخدام هذه الطريقة لتقدير معاملات نموذج الانحدار عندما يكون توزيع متغير الخطأ عشوائية يتوزع توزيعا احتماليا معروفا، بافتراضنا ان الاخطاء العشوائية يتوزع توزيعا طبيعيا متماثل ومستقل يمكننا الحصول على θ_0, σ_0^2 , بالبحث عن الحد الاقصى $(\theta, \sigma^2) \in \Theta \times (0, \infty)$ لدالة الامكان ويرمز لها بالرمز L وهي دالة احتمالية مشتركة. وفي حالة وجود متغير توضيحي واحد ولعينة عشوائية حجمها n يأخذ متغير الاستجابة

المشاهدات التالية $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ ويمكن تعريفها كالاتي (Brauer and eta, 2001 : 82)

$$L(\theta, \sigma^2 | Y) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [Y_j - f(t_j, \theta)]^2\right\} \quad (25)$$

الحلول الناتجة (θ_{MLE} و σ_{MLE}^2) هما تقديرات (MLE) للمعلمات (θ_0 و σ_0^2) على التوالي. نشير الى ان هذه الحلول $\theta_{MLE} = \theta_{MLE}^n(Y)$ و $\sigma_{MLE}^2 = \sigma_{MLE}^2(Y)$ هي متغيرات عشوائية من خلال حقيقة ان Y متغير عشوائي ، وللتوصل الى الحلول يجب تعظم دالة الامكان لحجم العينة او حجم مجموعة البيانات للمشاهدات n . وبعدها نقوم باخذ \log للدالة (MLE) وذلك لانها دالة رتبية ، فنتج لنا المعادلة التالية: (Hadeler, 2011 : 352)

$$\begin{aligned} \log L(\theta, \sigma^2 | Y) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n [Y_j - f(t_j, \theta)]^2 \end{aligned} \quad (26)$$

ويتم بعدها ايجاد تقدير الحدود القصوى للدالة وذلك من خلال اخذ المشتقة الجزئية للدالة ومساواتها بالصفر مرة بالنسبة (θ) وبأفترض انه التباين ثابت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta, \sigma^2 | Y) &= 0 \\ \sum_{j=0}^n [y_i - f(t_i, \theta)] \nabla f(t_i, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

اذ ان

$\nabla f(t_i, \theta)$ هي المشتقة $f(t_i, \theta)$

وبحل المعادلة (27) يتم التوصل الى

$$\begin{aligned} \theta_{MLE}(Y) &= \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} J(Y, \theta) \\ &= \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \sum_{j=1}^n [y_i - f(t_i, \theta)]^2 \end{aligned} \quad (28)$$

وبالمقابل نقوم مرة اخرى نشتق المعادلة (27) مشتقة ثانية، اي بأخذ المشتق للدالة (MLE) بالنسبة للتباين بأفتراض (θ) ثابتة ومساواتها بالصفر.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} = \log L(\theta, \sigma^2 | Y) = 0$$

$$\sigma_{MLE}^2(Y) = \frac{1}{n} J(Y, \theta) \quad (29)$$

ويمكن ملاحظة ان حل كلاً من θ_{MLE} وكذلك σ_{MLE}^2 ، يكون بشكل منفصل . وفي حالة لدينا متجه i من المشاهدات للمتغير t_i يتم استخدام المصفوفات و اعادة صياغة المعادلة

$$\underline{Y} = f(\underline{t}, \underline{\theta}_0) + \underline{\epsilon} \quad (30)$$

حيث ان $f \in R^m$

$$V_0 = \text{var}(\epsilon_i) = \text{diag}(\sigma_{0,1}^2, \dots, \sigma_{0,m}^2) \quad (31)$$

وهنا فرضنا ان المشاهدات Y_i^j يمكن ان تمتلك تباينات ثابتة ومختلفة لكل مشاهدة $\sigma_{0,j}^2$ ، اي انه يؤدي الى انه ليس بالضرورة ان تكون $\sigma_{0,j}^2$ مساوي $\sigma_{0,z}^2$. وبأفتراض أن الاخطاء تتوزع توزيع متماثل مستقل $i.i.d$ $\epsilon_j \sim N(0, V_0)$ ، يمكننا الحصول مقدر الامكان الاعظم MLE بالنسبة $\theta_{MLE}(Y_i)$ و $V_{MLE}(Y_i)$ لكلا من θ_0 و V_0 وذلك من خلال نفس النهج السابق لدالة الامكان .

$$\log L(\theta, V | [Y_1^1, \dots, Y_i^m]) = -\frac{n}{2} \sum_{j=1}^m \log \sigma_{0,j}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{0,j}^2} \sum_{i=1}^n [Y_i^j - f^j(t_i, \theta)]^2 \quad (32)$$

$$= -\frac{n}{2} \sum_{j=1}^m \log \sigma_{0,j}^2 - \sum_{i=1}^n [Y_i - f(t_i, \theta)]^T V^{-1} [Y_i - f(t_i, \theta)] \quad (33)$$

وباستخدام طرق الحل بالنسبة للمتجهات يمكن الحصول على صيغ مقدرات الامكان الاعظم MLE كالاتي: (David and Lang 2001 p.p 18)

$$\theta_{MLE} = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n [Y_i - f(t_i, \theta)]^T V_{MLE}^{-1} [Y_i - M(t_i, \theta)] \quad (34)$$

$$\operatorname{var} - \operatorname{cov}(\theta) = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - f(t_i, \theta_{MLE})] V^{-1} [Y_i - f(t_i, \theta_{MLE})]^T \right) \quad (35)$$

7. التطبيق وتحليل النتائج

تم استخدام بيانات وزارة الصحة من بتاريخ 24 شباط 2020 ولغاية 280 يوم من اجل التعرف على سلوك هذا المرض حيث كانت البيانات كما في الجدول رقم (1).

جدول رقم (1) يبين تسجيل حالات الاصابات بمرض كورونا في العراق

الايام	الحالات	الايام	الحالات	الايام	الحالات	الايام	الحالات	الايام	الحالات	الايام	الحالات	الايام	الحالات
2995	252	4484	210	2015	168	1852	126	92	84	65	42	1	0
2979	253	3662	211	2312	169	1786	127	56	85	29	43	4	1
8481	254	3231	212	2439	170	1507	128	72	86	79	44	0	2
2971	255	3773	213	2667	171	1645	129	45	87	44	45	2	3
3060	256	4505	214	2921	172	1687	130	49	88	56	46	1	4
2560	257	3752	215	2571	173	1477	131	53	89	51	47	5	5
4002	258	3755	216	2674	174	1940	132	136	90	39	48	6	6
3305	259	4111	217	3571	175	1724	133	90	91	78	49	6	7
2459	260	4028	218	4558	176	1511	134	41	92	45	50	5	8
1992	261	3285	219	2529	177	1627	135	52	93	38	51	4	9
2571	262	3685	220	2831	178	1623	136	69	94	44	52	5	10
2628	263	3922	221	3299	179	1878	137	73	95	50	53	9	11
2370	264	3861	222	3044	180	1699	138	66	96	47	54	9	12
2814	265	3817	223	3016	181	1645	139	46	97	56	55	10	13
2526	266	4676	224	3285	182	2274	140	102	98	37	56	6	14
3460	267	4209	225	3372	183	3784	141	199	99	51	57	18	15
2151	268	3413	226	3454	184	1914	142	586	100	50	58	2	16
2314	269	4031	227	3794	185	1695	143	243	101	25	59	6	17
2904	270	4282	228	3864	186	2179	144	235	102	33	60	10	18
2646	271	4233	229	4146	187	1997	145	331	103	20	61	5	19
2412	272	3827	230	3860	188	2045	146	282	104	39	62	14	20
2202	273	3894	231	3731	189	2308	147	386	105	23	63	6	21
2121	274	4158	232	3871	190	2114	148	255	106	31	64	21	22
2270	275	3188	233	3732	191	2197	149	383	107	30	65	6	23

2322	276	3456	234	3552	192	2158	150	354	108	28	66	11	24
1921	277	3210	235	3608	193	1863	151	292	109	39	67	15	25
2249	278	3329	236	3891	194	2177	152	647	110	59	68	21	26
2366	279	3186	237	3301	195	1900	153	606	111	17	69	19	27
1771	280	3055	238	4299	196	1927	154	1150	112	62	70	33	28
		2602	239	3465	197	3936	155	591	113	31	71	50	29
		2876	240	3669	198	2426	156	908	114	31	72	30	30
		2816	241	3824	199	2085	157	614	115	24	73	36	31
		3362	242	3479	200	1888	158	872	116	35	74	76	32
		3021	243	3889	201	1841	159	1006	117	41	75	48	33
		3140	244	3422	202	2611	160	724	118	32	76	41	34
		3244	245	4327	203	2225	161	850	119	56	77	83	35
		3488	246	4124	204	1992	162	968	120	113	78	65	36
		2929	247	3895	205	2339	163	1061	121	63	79	12	37
		3376	248	3859	206	2583	164	1207	122	62	80	20	38
		2855	249	4209	207	2168	165	808	123	61	81	24	39
		2414	250	4234	208	2343	166	1120	124	37	82	33	40
		3127	251	3952	209	2262	167	1174	125	92	83	20	41

ومن اجل ايجاد تقديرات قيم المعلمات من خلال استخدام طريقة الامكان الاعظم،
كان لابد من استعمال قيم اولية للنموذج، إذ كانت القيم الاولية في النماذج SIR كما
في جدول رقم(2)

جدول رقم (2) يبين القيم الاولية لنموذج SIR

Beta	0.3
Gamma	0.478
N	40222492
S	40222492
I	1
R	0

من خلال جدول رقم (2) نلاحظ أن قيمة المعلمة (beta) هي 0.3 وان قيمة المعلمة (gamma) هي 0.478 ، وان N تمثل عدد السكان و S تمثل عدد المعرضين للإصابة وهي بلغت 40222492 وان قيمة الذين تعرضوا للإصابة I هو 1 وان عدد المتعافين R هو صفر .

جدول رقم (3) يبين تقدير المعلمات باستخدام طريقة الامكان الاعظم

Beta hat	0.001983442
Gamma hat	1.063551

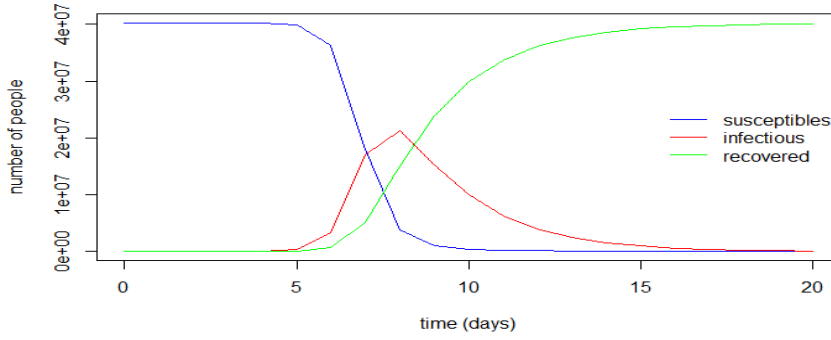
من خلال جدول رقم (3) نلاحظ ان قيمة beta التقديرية قد بلغت 0.001983442 وان قيمة المعلمة gamma التقديرية قد بلغت 1.063551 ، اذ تم استخدام برنامج R في استحصال النتائج. اذ تعتبر هذه التقديرات النتائج النهائية للقيم الاولية المبينة بالجدول رقم (2).

جدول رقم (4) يبين تقديرات المعرضين للإصابة والمصابين والمتعافين

Time(day)	S	I	R
0.00	40222492.00	1.00	0.00
1.00	40222478.37	12.46	2.17
2.00	40222308.64	155.16	29.20
3.00	40220194.52	1932.58	365.91
4.00	40193880.82	24053.96	4558.22
5.00	39869240.91	296745.10	56507.02
6.00	36258220.53	3299605.00	664667.80
7.00	17961662.26	17096550.00	5164277.00
8.00	3785587.82	21298540.00	15138360.00
9.00	956098.57	15313060.00	23953340.00
10.00	377120.09	9932748.00	29912620.00
11.00	207954.05	6288889.00	33725650.00
12.00	142888.14	3950149.00	36129460.00
13.00	112930.38	2472885.00	37636680.00
14.00	97475.13	1545574.00	38579440.00
15.00	88912.52	965159.70	39168420.00
16.00	83952.46	602414.70	39536130.00

17.00	80998.27	375895.20	39765600.00
18.00	79207.97	234510.70	39908770.00
19.00	78111.20	146289.40	39998090.00
20.00	77434.76	91250.37	40053810.00

من خلال الجدول رقم (4) نلاحظ ان اعداد المعرضين تبدأ بالتناقص بالتدرج مع تقدم الوقت، في حين نلاحظ ازدياد عدد المصابين ليعود بالانخفاض، في حين نلاحظ ان اعداد المتعافين يزداد بتقدم الوقت، وتجدر الاشارة هنا الى ان هذا البحث لم يتطرق الى دراسة موجات الالصابات كونها تأخذ منحى اخر. وكما مبين بالشكل رقم (2)



شكل رقم (2) يبين رسم نتائج المشتبه بالإصابة والمصابين فعلا والمتعافين

المصدر: من اعداد الباحث

8. مناقشة النتائج:

من خلال ما تقدم من عرض لنموذج SIR، والذي تم فيه استخدام قيم معلمات اولية من اجل الحصول علي القيم الاولية. حيث تم تقدير معلمات النموذج عبر طريقة الامكان الاعظم. اذ تم ملاحظة تزايد اعداد المصابين في الفترة الاولى من انتشار الوباء، تقابلها تناقص اعداد المعرضين للاصابة كونهم تحولوا الى مصابين. وبعد انقضاء فترة حضانة المرض، تم ملاحظة ان اعداد المصابين تناقصت كونهم تحولوا الى التعافي ويقابل هذا كذلك نقصان في عدد المعرضين للاصابة.

الاستنتاجات:

من خلال النتائج التي تم التوصل لها عن طريق تطبيق طريقة الامكان الاعظم تم كتابة الاستنتاجات الاتية:
نلاحظ أن استخدام طريقة الامكان الاعظم في تقدير المعلمات كانت جيدة في تقدير معلمات نموذج SIR حيث تمكنت من تقدير معلمات النموذج واعطاء نتائج جيدة .

نلاحظ انخفاض اعداد المشتبه في اصابتهم مع مرور الوقت، وهذا يأتي نتيجة تحويل من الى مصاب او غير مصاب من خلال قيم تقدير الامكان الاعظم.
نلاحظ ازدياد اعداد المصابين ووصله الى الذروة عند اليوم الثامن حيث يبدأ بالانخفاض بعد تحولهم الى التعافي.
نلاحظ ازدياد اعداد المتعافين تدريجيا مع مرور الوقت وذلك نتيجة تكوين المناعة لدى المرضى.

ان تقدير المعلمات نموذج SIR من خلال طريقة الامكان الاعظم والتي تعتبر طريقة احصائية اعطت نتائج جيدة كونها تعاملت من نماذج ديناميكية والتي تعتبر معقدة لكونها تعتمد على التغير بالزمن.

10. التوصيات :

بناء على الاستنتاجات التي تم التوصل اليها، تم كتابة التوصيات التالية:
نوصي باستخدام طرائق تقدير اخرى في تقدير معلمات نموذج SIR ومقارنتها مع طريقة الامكان الاعظم.
نوصي باستخدام نموذج SIRD والذي يأخذ بنظر الاعتبار تحول الاصابات اما الى متعافين او الى متوفين .

REFERENCES

1. Anderson, Roy M., May.Robert M. , and B. Anderson.(1992) Infectious Diseases of Humans Dynamics and Control (Oxford Science Publications). New York: Oxford UP, USA,.
2. Araujo, and Naimi.(2020) Spread of SARS-CoV-2 Coronavirus likely to be constrained by climate. MedRxiv.
3. Brauer .fred, Chávez, Carlos Castillo(2001), Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, New York Springer.
4. Getz, Wayne M., and Smith. Jamese Lloyd(2005) "Basic Methods for Modeling the Invasion and Spread of Contagious Diseases ". DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: 1-23.
5. Hackborn,Bill.,(2008) "Susceptible, Infected, Recovered: the SIR model of an Epidemic." University of Alberta: Augustana. Fall.
6. Hadeler.K.P,(2011) "Parameter estimation in epidemic models: simplified formulas," Canadian Applied Mathematics Quarterly, vol. 19, no. 4,.

7. Hethcote.W.H ، (2000)The Mathematics of Infectious Diseases، SIAM Rev. 42.
8. Iannelli، M.(2005) "The Mathematical Modeling of Epidemics ". Mathematical Models in Life Science: Theory and Simulation. 1 July. Florida Gulf Coast University.
9. J. Cui، Y. Sun، and H. Zhu(2008)، "The impact of media on the control of infectious diseases،" Journal of Dynamics and Differential Equations، vol. 20، no. 1، .
10. Katriel.G، "Stochastic discrete-time age-of-infection epidemic models،" (2013)International Journal of Biomathematics، vol. 6، Article ID 1250066، 20 pages.27
11. Keeling M.J .، (2001)"The mathematics of diseases." Plus Magazine : Living Mathematics. Mar. Fall 2008
12. Ma.J، Dushoff.J، Bolker، Earn.(2014) Estimating initial epidemic growth rates. Bulletin of mathematical biology، 76(1):
13. Murray J.D، Mathematical Biology، Springer-Verlag (1993)
- 14.O.Diekmann،and،J.A.P.Heesterbeek،(2000)MathematicalEpidemiology of Infectious Diseases:Model Building، Analysis and Interpretation. New York: John Wiley & Sons، Incorporated،.

15. R. Fierro, V. Leiva, and N. Balakrishnan, "Statistical inference on a stochastic epidemic model(2015).", Communications in Statistics—Simulation and Computation, vol. 44, no. 9
16. Rhodes, John A., and .Allman.S. Elizabeth(2003) , Mathematical Models in Biology : An Introduction. New York: Cambridge UP, .
17. SmithRoland David , and Lang Moore. L.C , (2001)"The SIR Model for Spread of Disease." MathDL. Dec. 2001. MMA. Fall 2008.
18. Wu.z .,McGoogan ,and Characteristics of and, JM , (2020)important lessons from the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Ch ina: summary of a report of 72 314 cases from the Chinese center for disease control and ,prevention. Jama